"Y si mañana es como ayer otra vez lo que
Fue hermoso será horrible después"
Charly García

2ª Reunión.
Independencia Lineal y Bases.

¿Cómo se demuestra analíticamente si un conjunto de vectores genera un espacio vectorial ?

Ejemplos:

1. Consideremos $\mathbb{R}_2[x]$

$$¿\ \text{gen}\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\} = \mathbb{R}_2[x]\ ?$$

Por lo visto en la reunión pasada, como $\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ toda combinación lineal de estos elementos es un elemento de $\mathbb{R}_2[x]$. Así que para ver si $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{gen}\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\}$ basta con ver que todo polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos del conjunto $\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\}$.

Si $P \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow P = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$.

Queremos ver si existen escalares $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{aligned} P = a_2x^2 + a_1x + a_0 &= \alpha(x^2 - x + 1) + \beta(x^2 + 2x + 1) + \gamma(3x - 5) \\ &= (\alpha + \beta)x^2 + (-\alpha + 2\beta + 3\gamma)x + (\alpha + \beta - 5\gamma) \end{aligned}$$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\begin{cases} a_2 &= \alpha + \beta \\ a_1 &= -\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ a_0 &= \alpha + \beta - 5\gamma \end{cases}$$

Vamos a ver si el sistema tiene solución, para todo valor de $a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$.

Planteamos la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |a_2 \\ -1 & 2 & 3 & |a_1 \\ 1 & 1 & -5 & |a_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & a_2 \\ 0 & 3 & 3 & |a_1 + a_0 \\ 0 & 0 & -5 & |a_0 - a_2 \end{pmatrix} \boxed{\text{Sist. compatible}} \checkmark$$

Entonces, podemos afirmar que $\mathbb{R}_2[x] \subset \text{gen}\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\}$ y por lo tanto:

$$\boxed{\mathbb{R}_2[x] = \text{gen}\{x^2 - x + 1,\ x^2 + 2x + 1,\ 3x - 5\}}$$

2. Consideremos $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$¿\ \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^{2\times 2}\ ?$$

Es claro que el conjunto de la izquierda está incluido en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, así que sólo tenemos que ver si toda matriz $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ puede escribirse como combinación lineal del conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right\}$. Buscamos entonces, si existen escalares $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha + \beta + \gamma + \lambda & \alpha + 2\gamma - \lambda\\ \alpha + 2\gamma + \lambda & 2\alpha + \beta + 3\gamma - \lambda\end{bmatrix}$$

Igualamos coeficiente a coeficiente y operamos con la matriz ampliada del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha + \beta + \gamma + \lambda & = & a_{11}\\ \alpha \quad + 2\gamma - \lambda & = & a_{12}\\ \alpha \quad + 2\gamma + \lambda & = & a_{21}\\ 2\alpha + \beta + 3\gamma - \lambda & = & a_{22}\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|l}1 & 1 & 1 & 1 & a_{11}\\ 1 & 0 & 2 & -1 & a_{12}\\ 1 & 0 & 2 & 1 & a_{21}\\ 2 & 1 & 3 & -1 & a_{22}\end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1;F_4-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r}1 & 1 & 1 & 1 & a_{11}\\ 0 & -1 & 1 & -2 & a_{12}-a_{11}\\ 0 & -1 & 1 & 0 & a_{21}-a_{11}\\ 0 & -1 & 1 & -3 & a_{22}-2a_{11}\end{array}\right) \xrightarrow[F_3'-F_2']{F_4'-F_2'}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}1 & 1 & 1 & 1 & a_{11}\\ 0 & -1 & 1 & -2 & a_{12}-a_{11}\\ 0 & 0 & 0 & 2 & a_{21}-a_{12}\\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{22}-a_{12}-a_{11}\end{array}\right) \xrightarrow{2F_4+F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r}1 & 1 & 1 & 1 & a_{11}\\ 0 & -1 & 1 & -2 & a_{12}-a_{11}\\ 0 & 0 & 0 & 2 & a_{21}-a_{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{22}+a_{21}-3a_{12}-2a_{11}\end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{Sistema compatible sólo si } 2a_{22} + a_{21} - 3a_{12} - 2a_{11} = 0}$$

Entonces el conjunto dado NO genera $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Porque el sistema no resulta compatible para cualquier matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, por lo tanto no todas las matrices pueden escribirse como combinación lineal de los elementos del conjunto.

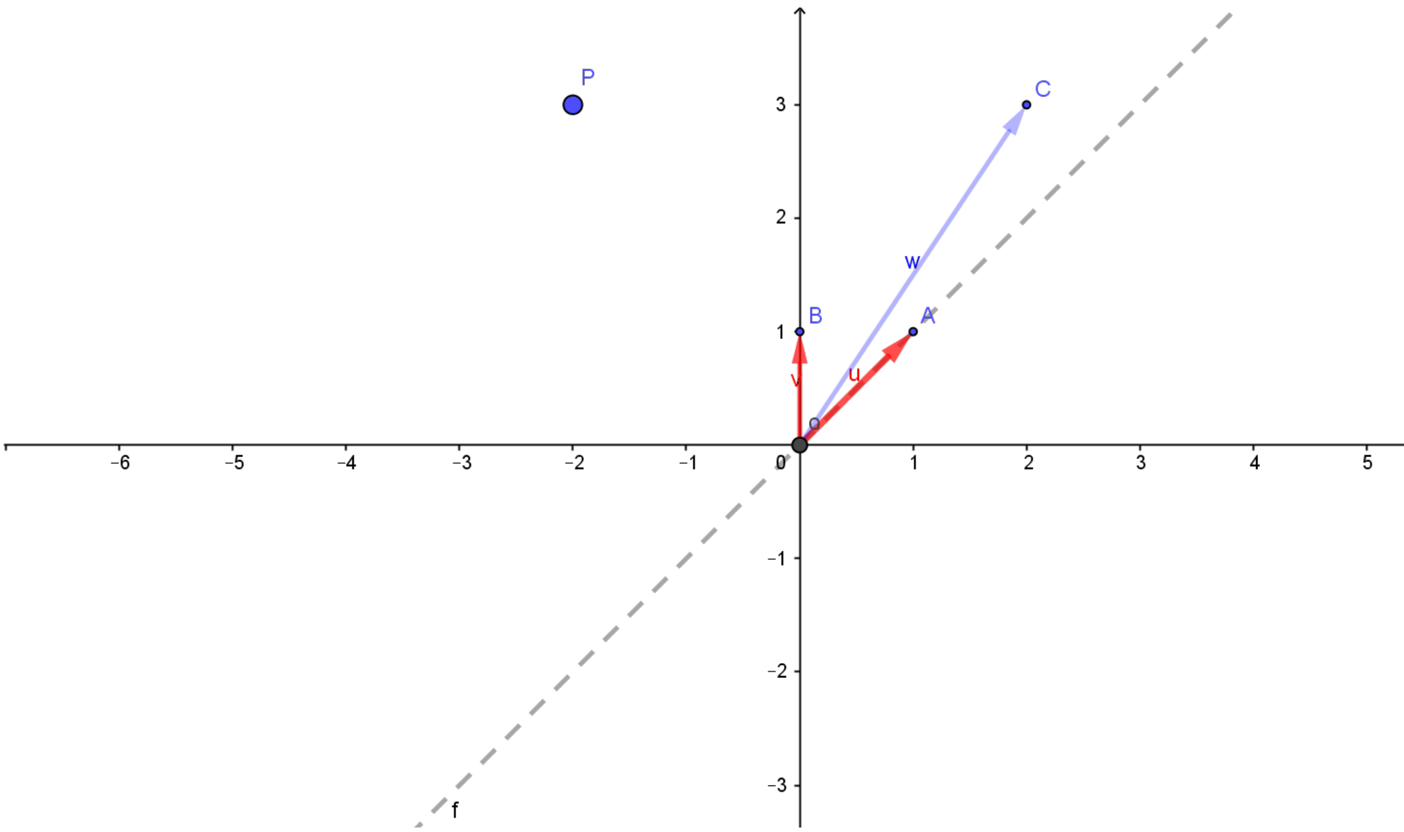
Más aún, gracias a las cuentas que hicimos, podemos decir cuál es la condición que cumplen losm elementos de este subespacio:

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\right\} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}/2a_{22} + a_{21} - 3a_{12} - 2a_{11} = 0\}$$

Concepto de dependencia e independencia lineal

- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$
- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$

¿Cuántos vectores necesito para generar $\mathbb{R}^2$?



Quiero quedarme con una cantidad mínima de generadores.

- $\mathbb{R}^2 =$ gen $\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$ Para demostrar la igualdad sólo debo demostrar que todo elemento de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $(1\ 1)^T$ y $(0\ 1)^T$.
  Entonces: Sea $X \in \mathbb{R}^2$ estudiemos si existen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tal que: $X = (x_1\ x_2)^T = \alpha(1\ 1)^T + \beta(0\ 1)^T \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow X = (x_1\ x_2)^T = (\alpha\ \ \alpha+\beta)^T$
  $\left\{\begin{array}{cccc} \alpha & & = & x_1 \\ \alpha+ & \beta & = & x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = x_1$ y $\beta = (x_2 - x_1)$
  El sistema **lineal** tiene solución única. Para cualquier valor del vector X puedo encontrar **únicos** escalares para *descomponerlo* como una combinación lineal de los vectores $(1\ 1)^T$ y $(0\ 1)^T$. Así que $\mathbb{R}^2 \subset$ gen $\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$.

Entonces el conjunto dado, genera $\mathbb{R}^2$ y notemos que, en este caso (en la que no *sobran* vectores) la solución del sistema es **única**. Veamos el otro ejemplo:

- $\mathbb{R}^2 =$ gen $\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$.
  Otra vez, ya sabemos que
  gen $\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Tomemos un elemento genérico $X \in \mathbb{R}^2$ y planteamos:
  $X = (x_1\ x_2)^T = \alpha\ (1\ 1)^T + \beta\ (0\ 1)^T + \gamma\ (2\ 3)^T$
  $(x_1\ x_2) = (\alpha + 2\gamma\ \alpha + \beta + 3\gamma)^T$

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & +\ 2\gamma & = & x_1 \\ \alpha+ & \beta+ & 3\gamma & = & x_2 \end{array}\right.$$

  Planteamos la matriz:

  $$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & | & x_1 \\ 1 & 1 & 3 & | & x_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_2 - x_1 \end{array}\right)\ S.C.I$$

  Entonces, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Como es compatible, afirmamos como en el caso anterior :

$$\mathbb{R}^2 \subset \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$$
$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}.$$

La diferencia, en cuanto a la resolución del sistema lineal planteado, con el caso anterior entonces, es que el sistema no tiene solución única cuando busco escribir cada elemento de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Entonces, resumamos para este caso tan simple qué encontramos:

$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$$
$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$$

- En el segundo conjunto, como los dos primeros vectores sirven para generar $\mathbb{R}^2$, en particular el vector $(2\ 3)^T$ es combinación lineal de los anteriores.

- Como vimos en la resolución de los sistemas, cuando tengo una cantidad mínima de generadores la combinación lineal para escribir cada elemento de $\mathbb{R}^2$ tiene única solución y en el otro caso no.

Dependencia e independencia lineal

Definición: Se dice que un conjunto de dos o más vectores, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vecorial, es linealmente dependiente (l.d.) si alguno de sus elementos es combinación lineal de los demás.Si el conjunto está formado por un único vector, v_1, se dice que es linealmente dependiente sólo si $v_1 = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$
Cuando esto no sucede, se dice que el conjunto es linealmente independiente.

Definición equivalente de independencia lineal

Se dice que un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial es linealmente independiente si:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \cdots + \lambda_n v_n = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Nota: **Existe una única combinación lineal para escribir $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.**
Ejemplo:

Analizar si el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. en $\mathbb{C}^2 - \mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}^2 - \mathbb{C}$.

1. Si analizamos la independencia lineal de este conjunto en $\mathbb{C}^2$ como un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, tenemos que igualar a $0_{\mathbb{C}^2}$ una combinación lineal:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + i\lambda_2 \\ \lambda_1(i+1) + \lambda_2(-1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces : $\lambda_1 + i\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. en $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

2. Veamos qué pasa si analizamos la independencia lineal del mismo conjunto pero considerando el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ como un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + i\lambda_2 \\ \lambda_1(i+1) + \lambda_2(-1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Si lo analizamos como un sistema lineal, tenemos la matriz ampliada :

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ (i+1) & (-1+i) \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-(1+i)F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces : $\lambda_1 + i\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = -i\lambda_2,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}.}$

$$(-i\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

$$\lambda_2 \left[(-i) \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, el conj es l.d. pues : $\begin{pmatrix} i \\ -1+i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix}$

Observaciones Vamos a listar algunas propiedades muy directas:

- Todo conjunto que contenga a $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ es l.d.

- Si un conjunto tiene dos elementos $\{u_1, u_2\}$ es ld $\exists k \in \mathbb{K}/u_2 = ku_1$.
- Si $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ es un conjunto de vectores y u_k es combinación lineal de los demás vectores del conjunto, entonces:

$$\text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\} = \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{k-1}\}$$

Lema de independencia lineal Si un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ con $v_1 \neq \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$, es linealmente dependiente , siempre existe un mínimo k tal que:

- $v_k \in$ gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es un l.i.

Comparación del cardinal de un conjunto l.i con un conjunto generador de un subespacio. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i. en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ genera el espacio vectorial $\mathbb{V} \Rightarrow \boxed{\text{n} \leq m}$.

Base de un espacio vectorial

Definición: Sea $\mathbb{V}-\mathbb{K}$espacio vectorial, se dice que un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es base de $\mathbb{V}$ si cumple:

- gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{V}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Como el número de elementos de un conjunto **linealmente independiente** es siempre **menor o igual** que el número de elementos de un conjunto que **genera** el espacio vectorial. Es inmediato demostrar que **todas** las bases de $\mathbb{V}$ tienen la cantidad de elementos.

Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son dos bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, vamos a demostrar que $n = m$.

- Como B genera $\mathbb{V}$ y B' es un conjunto l.i. $\Rightarrow n \geq m$ (1).
- Como B' genera $\mathbb{V}$ y B es l.i. $\Rightarrow m \geq n$ (2).
- Como se cumplen (1) y (2) $\Rightarrow n = m$.

Entonces, tiene sentido dar la siguiente definición:

Definición: Si un conjunto finito $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de un K-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que $\mathbf{n}$ es la dimensión de $\mathbb{V}$.
Se nota dim$(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$.

Aclaración: El subespacio nulo, $\{O_{\mathbb{V}}\}$, tiene dimensión 0. El subespacio nulo no tiene base.

Se dice que un espacio vectorial es de dimensión infinita si no es de dimensión finita.

Bases canónicas

- En $\mathbb{R}^n$ la base canónica es

$$E_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Que en forma más compacta, de ahora en más escribiremos:

$$E_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}\,,\ \text{con } e_i \in \mathbb{R}^n/(e_i)_k = \delta_{ik}.$$

El conjunto cumple con la definición de base, pues:

$$X \in \mathbb{R}^n, X = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n.$$

Genera ✓

Además, si :

$$\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ne_n = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_n)^T = (0,\ 0,\ \dots,\ 0)^T \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0 \dots \lambda_n = 0$$

Es l.i. ✓
Por lo tanto $E_{\mathbb{R}^n}$ es base de $\mathbb{R}^n$ y dim$(\mathbb{R}^n) = n$.

- Si consideramos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, la base canónica es:

  $$E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{C}} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$$

  Si $X \in \mathbb{C}^n, X = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)^T$, con $x_i \in \mathbb{C},\ \forall\, 1 \le i \le n.$

  $$X = \underbrace{x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n}_{\text{comb. lineal con escalares en } \mathbb{C}}$$

  El conjunto genera $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ ✓

  La independencia lineal, se prueba como en el ejemplo anterior.

  El conjunto es l.i. ✓

  Por lo tanto $E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{C}}$ es base de $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ y dim$(\mathbb{C}^n - \mathbb{C}) = n$

- Ahora consideremos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
  ¿Cuál es la diferencia con el punto anterior?
  Las combinaciones lineales en este espacio vectorial sólo admiten escalares reales, entonces ya no podemos generar el espacio vectorial con los vectores $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$
  Pues haciendo combinaciones lineales de estos vectores con números reales, sólo obtenemos vectores que en cada coordenada tienen un número real.

$X \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$
Cada $x_k = a_k + ib_k,\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$, entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned} X &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T \\ &= (a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2,\ \ldots,\ a_n + ib_n)^T \\ &= a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n + b_1e_{i1} + b_2e_{i2} + \cdots + b_ne_{in} \end{aligned}$$

Donde $e_{ik} \in \mathbb{C}^n / (e_{ik})_l = i.\delta_{kl}$

Entonces, $\forall X \in \mathbb{C}^n$ se cumple:

$$X = \underbrace{a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n + b_1e_{i1} + b_2e_{i2} + \cdots + b_ne_{in}}_{\text{c. l. de vectores en } \mathbb{C}^n \text{con escalares reales.}}$$

Entonces, en este espacio vectorial, $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$, la base más directa es

$$E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{R}} = \{e_1, e_2, \ldots e_n, e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}\}$$

Ya vimos que $E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{R}}$ genera $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ ✓.

La independencia lineal también es directa pues si:
$\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \cdots + \lambda_ne_n + \beta_1e_{i1} + \beta_2e_{i2} + \cdots + \beta_ne_{in} = \mathbb{O}_{C^n}$

Igualando coordenada a coordenada:

$\lambda_1 + i\beta_1 = 0, \lambda_2 + i\beta_2 = 0, \ldots \lambda_n + i\beta_n = 0.$

Así obtenemos:
$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_n.$
El conjunto es l.i. ✓

Por lo tanto, $E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{R}}$ es base de $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ y dim$(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}) = 2n$

- En $R^{m\times n}$, la base canónica, se nota:
  $E_{R^{m\times n}} = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots e_{2n}, \ldots, e_{m1}, \ldots e_{mn}\}$

$$[e_{kl}]_{ij} = \begin{cases} 1si & (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ si} & (i,j) \neq (k,l) \end{cases},\ \forall\ 0 \leq ß, k \leq$$

Tarea: chequear que
$E_{R^{m\times n}}$ genera $R^{m\times n}$ y es l.i.
Por lo tanto, es base de $R^{m\times n}$ y dim$(R^{m\times n}) = m \times n.$

- Estudiemos ahora $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, junto con el polinomio nulo.
  La base canónica de $\mathbb{R}_n[X]$ será:

  $E_{\mathbb{R}_n[X]} = \{x^n,\ x^{n-1}\ \dots,\ x,\ 1\}$
  Es inmediato que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

  $P = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}_{\text{comb. lineal de } x^n,\dots,x,1}$, con $a_i \in \mathbb{R}$.
  Luego $E_{\mathbb{R}_n[x]}$ genera $\mathbb{R}_n[X]$ ✓

  La independencia lineal, también es directa pues: $\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0.1 = \mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \lambda_n = \cdots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$, pues para que dos polinomios sean iguales, sus coeficientes deben ser iguales.
  El conjunto es l.i.✓
  Luego $E_{\mathbb{R}_n[x]}$ es base de $\mathbb{R}_n[X]$ y dim$(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

Observaciones importantes En lo que sigue $\mathbb{V}$ es un K-espacio vectorial con dim$(\mathbb{V}) = n$.

1. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es l.i. $\Leftrightarrow k \leq n$.

   Esto es consecuencia directa de la propiedad demostrada en el Episodio anterior (cardinal de un conjunto l.i. $\leq$ cardinal de un conjunto generador). Como dim$(\mathbb{V}) = n$, toda base tiene n elementos y como toda base es un conjunto generador de $\mathbb{V}$ se cumple que $k \leq n$.✓

2. Si $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ genera $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.

   Es consecuencia de la observación ya citada, cualquier base de $\mathbb{V}$ tiene n elementos y es l.i, por lo tanto como este conjunto es generador de $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.✓

3 Si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base.

Supongamos que B no es base, como por hipótesis es un conjunto l.i, si no es base del espacio vectorial, será porque no genera $\mathbb{V} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V}$ tal que $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v\}$ es l.i. Absurdo, pues como dim$(\mathbb{V}) = n \Rightarrow$ todo conjunto l.i. **tiene a lo sumo** n elementos $\Rightarrow B$ genera $\mathbb{V}$ y por lo tanto es base.✓

4 Si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base de $\mathbb{V}$.
Otra vez, supongamos que B genera $\mathbb{V}$ y no es base $\Rightarrow B$ no es l.i.$\Rightarrow$ hay algún vector de B que es combinación lineal de los demás, supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $u_n \Rightarrow$ gen$\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\} = \mathbb{V}$. Absurdo, pues como dim$(V) = n$ todo conjunto generador **tiene por lo menos** n elementos. Luego B es l.i. y por lo tanto B es base. ✓

5 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V} \Rightarrow$ dim$(S) \leq n$. (Tarea para el hogar)

6 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V}$ y dim$(S) =$ dim$(\mathbb{V}) \Rightarrow S = \mathbb{V}$.

Si dim$(S) =$ dim$(\mathbb{V}) = n \Rightarrow \exists\ B_S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de S de n elemmentos. Si suponemos que $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow \exists w \in \mathbb{V}$ tal que $w \notin S$ Entonces, el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$ resulta l.i. Absurdo pues como dim$(\mathbb{V}) = n$, todo conjunto l.i. tiene **a lo sumo** n elementos. Como el absurdo viene de suponer $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow S = \mathbb{V}$.✓

Independencia Lineal de funciones en $C^m(I)$ Supongamos que tenemos que analizar si un conjunto de funciones $\{\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n\} \subset C^m(I), (m \geq n-1)$ es l.i.
Antes de seguir recordemos que $C^m(I)$ es el conjunto de las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son m veces derivables con continuidad.
Para ver si las funciones son l.i. igualemos una combinación al elemento neutro del espacio vectorial:

$$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_n\phi_n = \mathbb{O}_{C^m(I)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in I.$$

Recordando que la derivada de una función constante en un intervalo es nula en ese intervalo y derivando m.a m. hasta obtener tantas ecuaciones como incognitas, se cumple $\forall x \in I$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) &= 0\\
\lambda_1\phi_1'(x) + \lambda_2\phi_2'(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n'(x) &= 0\\
\lambda_1\phi_1''(x) + \lambda_2\phi_2''(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n''(x) &= 0\\
\vdots &= \vdots\\
\lambda_1\phi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2\phi_2^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n^{n-1}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Si escribimos este conjunto de ecuaciones en forma matricial, obtenemos :

$$\begin{pmatrix}
\phi_1(x) & \phi_2(x) & \ldots & \phi_n(x)\\
\phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \ldots & \phi_n'(x)\\
\phi_1''(x) & \phi_2''(x) & \ldots & \phi_n''(x)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1}(x) & \ldots & \phi_n^{(n-1)}(x)
\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, si $x = x_0$ el sistema:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''x_0) & \phi_2''x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo tiene solución única si y sólo si la matriz del sistema es inversible. esto es equivalente a pedir que su determinante sea no nulo.

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''x_0) & \phi_2''x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces encontramos una condición que nos permiter afirmar cuando un conjunto de n funciones son l.i. en $C^m(I),\ m \geq n-1$.

Definición: Dado un conjunto de funciones $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\}$ con $\phi_i \in C^{(n-1)}(I) \forall\ 1 \leq i \leq n$ se llama **wronskiano** $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\}$ a:

$$W(\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''x_0) & \phi_2''x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

Teorema del Wronskiano En el desarrollo anterior, hemos demostrado que :

Si $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ y para algún $x_0 \in I$, se cumple $W(\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n) \neq 0 \Rightarrow \{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\}$ es linealmente independiente.

Si $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ es un conjunto linealmente dependiente $\Rightarrow W(\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n) = 0\ \forall x \in I$.

Aclaración: **El recíproco de este teorema no es verdadero** , existen funciones tales que $W(\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n) = 0, \forall x \in I$, pero las funciones bf no son linealmente dependientes. Ejemplos

a Verifique que el conjunto $\{e^{2x},\ e^{3x}\}$ es l.i. en $C^\infty(\mathbb{R})$.

Calculemos el wronskiano de estas dos funciones. Aquí: $\phi_1(x) = e^{2x},\ \phi_2(x) = e^{3x}$
$\phi_1'(x) = 2e^{2x},\ \phi_2'(x) = 3e^{3x}$

$$W(e^{2x},\ e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el conjunto $\{e^{2x},\ e^{3x}\}$ es l.i.

b Pruebe que el conjunto $\{x^3,\ x^2,\ x\}$ es l.i.usando el teorema del wronskiano.Aquí:
$\phi_1(x) = x^3,\ \phi_2(x) = x^2,\ \ \phi_3(x) = x$
$\phi_1'(x) = 3x^2,\ \phi_2'(x) = 2x,\ \ \phi_3'(x) = 1$
$\phi_1''(x) = 6x,\ \phi_2''(x) = 2,\ \phi_3''(x) = 0$

$$W(x^2,\ x,\ 1) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x \\ 3x^2 & 2x & 1 \\ 6x & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x^3.$$

$$W(x^2,\ x,\ 1) = -2x^3 \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto el conjunto $\{x^3,\ x^2,\ x\}$ es l.i.

c Analicemos la independencia o dependencia lineal del conjunto $\{x^3, |x^3|\} \subset C^2(\mathbb{R})$.
Si $\phi_1(x) = x^3$ y $\phi_2(x) = |x^3|$.

Una primera cuestión es que, teniendo en cuenta que

$$\phi_2(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quedaría como tarea ver que esta es dos veces derivable , con continuidad, en $x = 0$. Suponiendo que esa tarea ya esta hecha, si calculamos el $W(\phi_1, \phi_2)$, tenemos: $\phi_1'(x) = 3x^2$ y $\phi_1''(x) = 6x$

$$\phi_2' = \begin{cases} 3x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -3x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases} \text{ y } \phi_2'' = \begin{cases} 6x \text{ si } x \geq 0 \\ -6x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0,\ \forall x \geq 0.$$

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0,\ \forall x < 0.$$

$W(\phi_1,\ \phi_2) = 0$ y las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son claramente l.i, pues no son una múltiplo de la otra.
Además de lo gráficamente, una de las primeras propiedades que vimos al definir independencia lineal, en el episodio anterior, fue que si un conjunto de dos elementos era l.d, entonces un elemento debía ser múltiplo del otro. Entonces:

Si es l.d:
$\exists\ k \in \mathbb{R}\ /\phi_2(x) = k\phi_1(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = \phi_2(x)/\phi_1(x),\ \forall x$ tal que $\phi_1(x) \neq 0.$
En este caso, como $\phi_2/\phi_1 = 1$ si $x \geq 0$ y $\phi_2/\phi_1 = -1$ si $x < 0 \Rightarrow \nexists\ k/\phi_2(x) = k\phi_1(x)$. Por lo tanto $\{\phi_1,\ \phi_2\}$ es l.i. Tal como señalamos, puede ser que el wronskiano de un conjunto de funciones resulte nulo y las funciones ser l.i.

Por supuesto, si tomamos un conjunto de funciones l.d. el wronskiano con seguridad se va a anular.

Conclusión : Si $W(\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n) = 0$, no puedo afirmar que las funciones sean l.d. o l.i. y tendré que estudiar la independencia lineal del conjunto con otras herramientas.